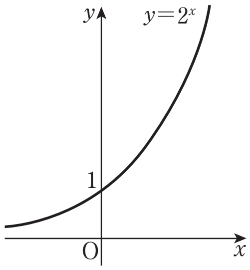
PART4 中間値の定理

要点整理と公式

要点 ① 連続関数の最大値・最小値

関数 $f(x)=2^x$ は，区間 $(-\infty,\ \infty)$ における連続関数である。

$\lim_{x\to\infty} 2^x=\infty$ であるから，この区間で $f(x)$ の値はいくらでも大きくなる。また，$\lim_{x\to-\infty} 2^x=0$ であるが，$f(x)$ の値が 0 になることはない。したがって，この区間における $f(x)$ の最大値，最小値はない。

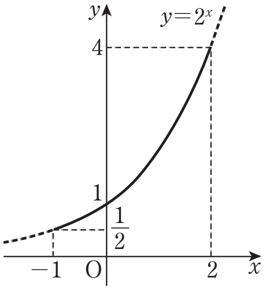


この関数 $f(x)$ を，閉区間 $[-1,\ 2]$ で考えると

最大値は $f(2)=4$

最小値は $f(-1)=\dfrac{1}{2}$

である。



一般に，次のことが成り立つ。

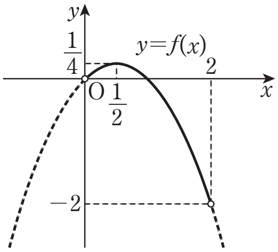
> **連続関数の最大値・最小値**
> 閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ。

開区間で連続な関数は，その区間で最大値や最小値をもつ場合も，もたない場合もある。

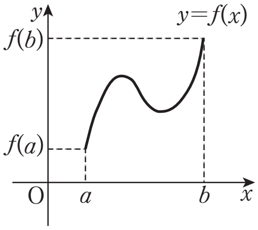
(ex) $f(x)=-x^2+x$ の $0<x<2$ における最大値，最小値について

$f(x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より，$y=f(x)$ のグラフは右図実線部分。よって，最小値はない。

最大値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$



関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続ならば，このグラフは点 $(a,\ f(a))$ と点 $(b,\ f(b))$ を結ぶ，切れ目のない曲線である。$f(a) \neq f(b)$ のとき，$f(x)$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての値をとる。よって，次の定理が成り立つ。

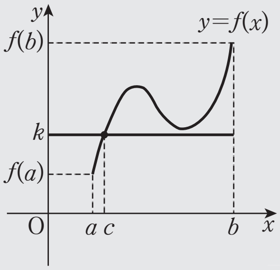


中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ならば
$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$f(c)=k$$

を満たす実数 c が，a と b の間に少なくとも 1 つ存在する。



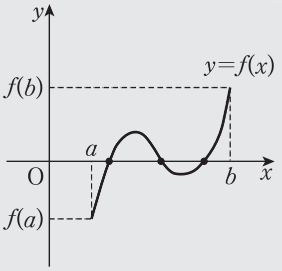
中間値の定理より，次のことが成り立つ。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が

ならば

方程式 $f(x)=0$

は，a と b の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。



(ex) 方程式 $3^x=5x$ が $2<x<3$ に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示す。

$f(x)=3^x-5x$ とおく。

$f(x)$ は閉区間 $[2,\ 3]$ で　　　であり

$$f(2)=3^2-5\cdot 2=-1 \qquad ,\quad f(3)=3^3-5\cdot 3=12$$

であるから，中間値の定理より，方程式 $f(x)=0$ すなわち $3^x=5x$ は，$2<x<3$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

4 方程式 $\cos x = 2x$ は, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

Point Pickup

中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で, $f(a) \neq f(b)$ ならば $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して $f(c)=k$ を満たす実数 c が, a と b の間に少なくとも1つ存在する。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で, $f(a)$ と $f(b)$ が異符号 ならば, 方程式 $f(x)=0$ は, a と b の間に少なくとも1つの実数解をもつ。

この定理を使うときは,「　　　　」で「　　　」であることを確認する必要がある。

第 6 講　PART4 確認問題

1　関数 $f(x)=3x-2^x$ において，方程式 $f(x)=0$ は $3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

ただし，[ア]，[イ] は，下の①，②のうちから選べ。

①　$>$　　　　②　$<$

〔証明〕

$f(x)$ は区間 $[3,\ 4]$ で連続であり，

$f(3)$ [ア] 0

$f(4)$ [イ] 0

よって，方程式 $f(x)=0$ は，$3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

2　方程式 $\sin x=1-x$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

ただし，[ウ] ～ [オ] は，下の①～④のうちから選べ。

①　$\sin x+x-1$　　　　②　$\sin x-x+1$

③　$>$　　　　④　$<$

〔証明〕

$f(x)=$ [ウ] とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ \pi]$ で連続であり，

$f(0)$ [エ] 0

$f(\pi)$ [オ] 0

よって，方程式 $f(x)=0$，すなわち $\sin x=1-x$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

PART4 中間値の定理

4　方程式 $\cos x=2x$ は, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

[解答]

$f(x)=\cos x-2x$ とおく。

$f(x)$ は閉区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続であり

$$f(0)=\cos 0-2\cdot 0=1>0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi<0$$

であるから，中間値の定理より，方程式 $f(x)=0$ すなわち $\cos x=2x$ は，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ

第 6 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：②

[解説]

$f(x)$ は区間 $[3,\ 4]$ で連続であり，

$$f(3)=9-8=1>0$$

$$f(4)=12-16=-4<0$$

よって，中間値の定理より，[A]

方程式 $f(x)=0$ は，$3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

[A]　中間値の定理の利用
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，方程式 $f(x)=0$ は，a と b の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

2　**[正解]** ウ：①，エ：④，オ：③

[解説]

$$f(x)=\sin x-(1-x)$$

$$=\boldsymbol{\sin x+x-1}$$

とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ \pi]$ で連続であり，

$$f(0)=-1<0$$

$$f(\pi)=\pi-1>0$$

よって，中間値の定理より，[B]

方程式 $f(x)=0$，すなわち $\sin x=1-x$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

[B]　中間値の定理の利用
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，方程式 $f(x)=0$ は，a と b の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。